

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра цифровых технологий,  
математики и экономики

**Методические указания**

**к выполнению расчетно-графической работы**

**«Моделирование и решение прикладных задач, сводящихся к  
дифференциальным уравнениям»**

по дисциплине: «Специальные разделы высшей математики», часть I  
название дисциплины

для направлений: 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,

09.03.02 «Информационные системы и технологии»,  
бакалавриат, очная форма обучения  
форма обучения

Мурманск  
2022

Составитель – Кацуба Валентина Сергеевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры цифровых технологий, математики и экономики МГТУ

Методические указания к выполнению расчетно-графической работы «Моделирование и решение прикладных задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям» дисциплины «Специальные разделы высшей математики», часть 1, рассмотрена и одобрена на заседании кафедры-разработчика цифровых технологий, математики и экономики МГТУ

«29»\_06\_2022 г., протокол №13.

дата

Рецензент –Ромахова Ольга Андреевна, старший преподаватель кафедры цифровых технологий, математики и экономики МГТУ

Зарегистрировано как электронное издание МГТУ

Заказ

Уч-изд. листов

## Оглавление

1. Общие организационно-методические указания .....	4
2. Задания РГР .....	5
3. Пример оформления отчета .....	7
4. Список вопросов к защите РГР .....	24
5. Список рекомендуемых учебных ресурсов.....	24
6. Образец оформления титульного листа .....	25

## 1. Общие организационно-методические указания

Расчетно-графическая работа «Моделирование и решение прикладных задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям» предусмотрена в первой части дисциплины «Специальные разделы высшей математики» и включает в себя задачи, относящиеся к модулю «Дифференциальные уравнения».

*Целевая установка:* студент выполняет РГР по индивидуальному варианту, руководствуясь материалами лекций по темам «Обыкновенные дифференциальные уравнения» и «Элементы дифференциальных уравнений в частных производных», а также дополнительными учебными ресурсами. Для данной прикладной задачи требуется:

- сформулировать математическую модель в форме задачи Коши для обыкновенного ДУ или начально-краевой задачи для одного из классических уравнений математической физики;
- построить решение математической модели одним из известных аналитических методов;
- выполнить численную или(и) графическую реализацию решения;
- провести исследование решения по одному из управляемых параметров задачи.

## 2. Задания РГР

### Задача 1

Для поставленной физической задачи составить математическую модель в форме начально-краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных, получить её решение методом Фурье, провести численную реализацию и исследование этого решения.

### **Варианты 1,2,3**

В тонком стержне длины  $l$ , изготовленном из некоторого однородного изотропного материала и имеющего теплоизолированную боковую поверхность, имеется установившееся распределение температуры, описываемое заданной функцией  $\varphi(x)$ ,  $x \in [0; l]$ . В некоторый момент времени условия процесса теплопроводности в стержне изменяются так, что один из

его концов становится теплоизолированным, а на другом конце устанавливается и далее поддерживается нулевая температура. Требуется исследовать функцию распределения температуры по длине стержня и в любой момент времени, начиная от момента указанного изменения условий процесса теплопроводности.

Для варианта 1:  $\varphi(x) = A(lx - x^2)$ , материал стержня – золото.

Для варианта 2:  $\varphi(x) = A \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ , материал стержня – сталь.

Для варианта 3:  $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2Ax}{l}, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{2A}{l}(l-x), & \text{если } \frac{l}{2} < x \leq l. \end{cases}$  материал стержня – медь.

#### Вариант 4

На одном конце тонкого однородного стержня длиной  $l$  с теплоизолированной боковой поверхностью поддерживалась температура  $0^\circ$ , а на другом -  $T^\circ$  до достижения стационарного режима. В некоторый момент времени оба конца стержня теплоизолировали, так что на них градиент температуры стал равным нулю на всё последующее время. Исследовать распределение температуры в стержне, изготовленном из алюминия, от момента изоляции его концов до момента выравнивания температуры по длине стержня.

#### Вариант 5

На одном конце тонкого однородного стержня длиной  $l$  с теплоизолированной боковой поверхностью поддерживалась температура  $0^\circ$ , а на другом -  $T^\circ$  до достижения стационарного режима. В некоторый момент времени теплоизолировали конец стержня, на котором поддерживалась температура  $T^\circ$ , так что на нём градиент температуры стал равным нулю на всё последующее время. Исследовать распределение температуры в стержне от момента изоляции одного из концов при условии, что другой конец стержня остаётся при температуре  $0^\circ$  (материал, из которого изготовлен стержень – нержавеющая сталь).

#### Варианты 6,7,8

Однородный тонкий брусок постоянного поперечного сечения расположен вдоль оси  $OX$  так, что его торцы находятся в плоскостях  $x=0$  и  $x=l$ . Боковая поверхность и поверхности торцов бруска являются теплоизолированными, внутри бруска нет источников тепла. В момент времени  $t=0$  распределение температуры по длине бруска задано функцией  $f(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ . Исследовать распределение температуры  $U(x,t)$  в этом

бруске при значениях  $t > 0$ .

Для варианта 6:  $f(x) = A(lx - x^2)$ , материал стержня – алмаз.

Для варианта 7:  $f(x) = A \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ , материал стержня – графит.

Для варианта 8:  $f(x) = \begin{cases} \frac{2Ax}{l}, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{2A}{l}(l-x), & \text{если } \frac{l}{2} < x \leq l, \end{cases}$  материал стержня – стекло.

### Варианты 9,10,11,12

Рассматривается процесс теплопроводности в тонком однородном стержне, имеющем длину  $l$  и изготовленном из изотропного материала с известными теплофизическими характеристиками. Боковая поверхность стержня является теплоизолированной и начальное распределение температуры по длине стержня задано функцией  $f(x), x \in [0; l]$ . На конце  $x=0$  температура поддерживается равной нулю, а на конце  $x=l$  температура изменяется по закону  $\varphi(t) = Ae^{-t}$ . Требуется исследовать распределение температуры вдоль стержня в любой момент времени  $t > 0$ .

Для варианта 9:  $f(x) = A \cdot \frac{x}{l}$ , материал стержня – серебро.

Для варианта 10:  $f(x) = A \cdot \frac{x^2}{l^2}$ , материал стержня – свинец.

Для варианта 11:  $f(x) = A \cdot \frac{2lx - x^2}{l^2}$ , материал стержня – графит.

Для варианта 12:  $f(x) = \begin{cases} A \cdot \frac{2x}{l}, & x \in \left[0; \frac{l}{2}\right] \\ A, & x \in \left(\frac{l}{2}; l\right] \end{cases}$ , материал стержня – золото.

### Вариант 13

Однородная струна длиной  $l$  закреплена на конце  $x=0$ , а к другому её концу прикреплено кольцо, массой которого можно пренебречь. Кольцо может скользить по гладкому вертикальному стержню. В начальный момент времени  $t=0$  кольцо отклонено на малое расстояние  $h$  от положения равновесия и свободно отпущено. Исследовать отклонения  $U(x,t)$  точек струны для любого момента времени.

### Вариант 14

Исследовать вынужденные поперечные колебания упругой струны, закреплённой на конце  $x=0$  и подверженной на конце  $x=l$  действию возмущающей силы, вызывающей в любой момент времени  $t$  смещение, равное  $A\sin(\omega t)$ .

### Вариант 15

Исследовать продольные колебания однородного цилиндрического стержня, один конец которого жёстко закреплён, а к другому концу приложена сила  $F = A\sin(\omega t)$ , направление которой совпадает с осью стержня.

### Вариант 16

Тонкий стержень длиной  $l$ , конец которого  $x=0$  закреплён, находится в состоянии покоя. В момент времени  $t=0$  стержень выведен из равновесия силой  $Q$  (на единицу площади), приложенной к свободному концу стержня, направленной вдоль оси стержня и продолжающей действовать при  $t \geq 0$ . Исследовать смещения  $U(x,t)$  точек стержня в любой момент времени  $t \geq 0$ .

## 3. Пример оформления отчета о выполнении РГР

### Решение краевой задачи для двумерного уравнения Лапласа в прямоугольной области

#### Постановка задачи

Найти и исследовать распределение электростатического потенциала  $U(x,y)$  в заданной прямоугольной области  $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \end{cases}$ , если известна информация о функции  $U(x,y)$  на границе этой области:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=a} = A(by - y^2), \quad U|_{y=0} = B, \quad U|_{y=b} = 0.$$

#### Решение задачи

##### 1. Вывод уравнения состояния

Вывод ДУЧП, описывающего распределение электростатического потенциала, приводится в учебнике по математической физике [2], а также краткий вывод этого уравнения есть в учебнике [1]. Ниже излагаются основные идеи краткого вывода.

Пусть в однородной среде, заполняющей некоторый объем  $V$ , проходит электрический ток, плотность которого в каждой точке  $(x, y, z)$  задается векторной функцией

$$\vec{j}(x, y, z) = J_x \cdot \vec{i} + J_y \cdot \vec{j} + J_z \cdot \vec{k}$$

Предположим, что плотность тока не зависит от времени  $t$  и что в рассматриваемом объеме нет источников тока. Следовательно, поток вектора  $\vec{j}$  через любую замкнутую поверхность  $S$ , лежащую внутри объема  $V$ , будет равен нулю:

$$\oiint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, ds = 0,$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор, направленный по внешней нормали к поверхности  $S$ . Преобразуем по формуле Остроградского-Гаусса интеграл по замкнутой поверхности к тройному интегралу по объему, ограниченному этой поверхностью. В результате получим, что

$$\iiint_V \text{Div } \vec{j} \, dV = 0.$$

Теорема о среднем в интегральном исчислении позволяет сделать следующий важный вывод: если интеграл от непрерывной функции по любому геометрическому объекту интегрирования равен 0, то это означает, что равна нулю подынтегральная функция во всех точках этого геометрического объекта. Следовательно, последнее равенство дает, что:

$$\text{Div } \vec{j} = 0$$

На основании обобщенного закона Ома определяем в рассматриваемой проводящей среде электрическую силу (напряженность электростатического поля):

$$\vec{E} = \vec{j} / \lambda, \text{ или } \vec{j} = \lambda \vec{E}, \quad (*)$$

где  $\lambda$  – проводимость среды, которую мы будем считать постоянной.

Из общих уравнений электромагнитного поля (уравнения Максвелла) следует, что если процесс стационарный, то векторное поле  $\vec{E}$  является безвихревым, т.е.  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ . Тогда это поле является потенциальным, следовательно, существует функция  $\varphi$  такая, что:

$$\vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

Функция  $\varphi$  называется потенциалом векторного поля  $\vec{E}$ . На основании равенства (\*) получаем:

$$\vec{j} = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

Теперь уравнение  $\text{div } \vec{j} = 0$  приводится к виду:

$$\lambda \text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} \varphi) = 0$$



Из определений дивергенции и градиента имеем, что:

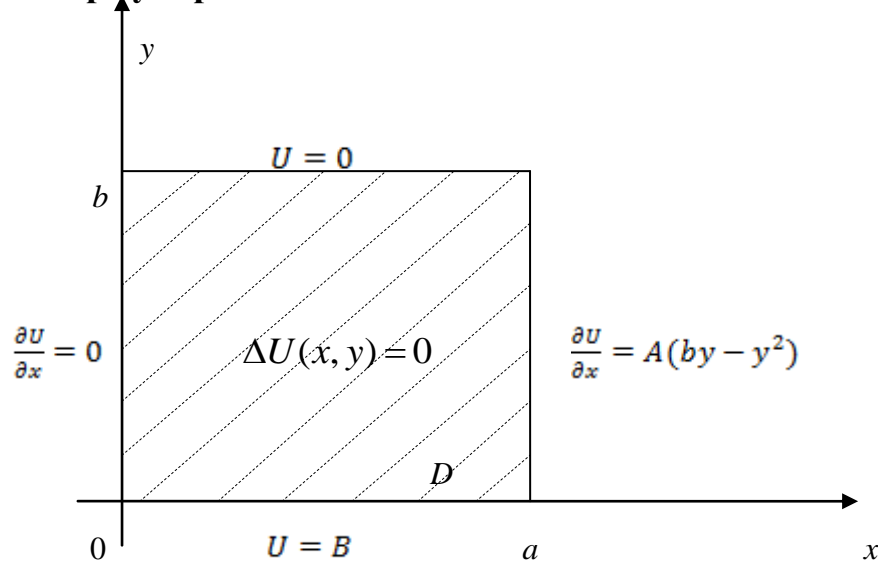
$$\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0, \text{ или } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

Таким образом, получается трехмерное уравнение Лапласа, которому удовлетворяет функция  $\varphi(x, y, z)$  - потенциал электростатического поля.

Если рассматривать распределение электростатического потенциала в двумерной

области, то уравнение Лапласа будет двумерным:  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ .

## 2. Формулировка математической модели задачи



Требуется найти функцию  $U(x,y)$ , где  $(x, y) \in D: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ ,

удовлетворяющую ДУЧП Лапласа:  $\Delta U(x, y) = 0 \Leftrightarrow U''_{xx} + U''_{yy} = 0$  (1)

и граничным условиям смешанного типа:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=a} = A(by - y^2), \quad U|_{y=0} = B, \quad U|_{y=b} = 0 \quad (2)$$

Данная задача представляет собой краевую задачу для ДУЧП эллиптического типа. Управляемыми параметрами в задаче являются: числа  $a, b$  – длины сторон прямоугольной области  $D$ , числа  $A, B$  – константы, которые входят в функции, задающие граничные условия.

## 3. Решение краевой задачи методом Фурье

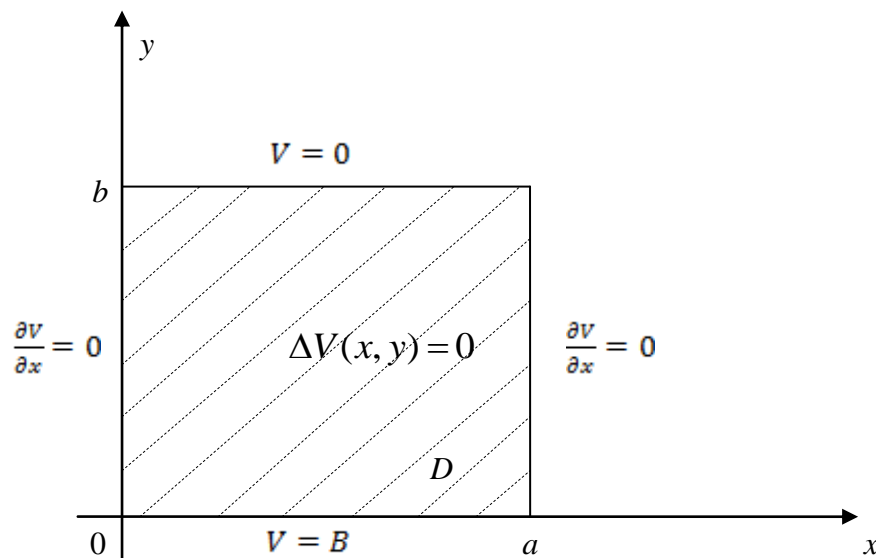
Для решения задачи будем использовать метод Фурье (метод разделения переменных), который будет работать с учетом модификации, так как выполнены не полностью необходимые условия для классической реализации этого метода (а именно – нет равенства нулю граничных условий на двух противоположных сторонах прямоугольной области).

Суть модификации состоит в том, что искомую функцию  $U(x, y)$  представим в виде суммы двух функций:

$$U(x, y) = V(x, y) + W(x, y), \quad (3)$$

и для каждой функции  $V(x, y)$  и  $W(x, y)$  поставим краевую задачу с нулевыми граничными условиями на двух противоположных сторонах прямоугольной области.

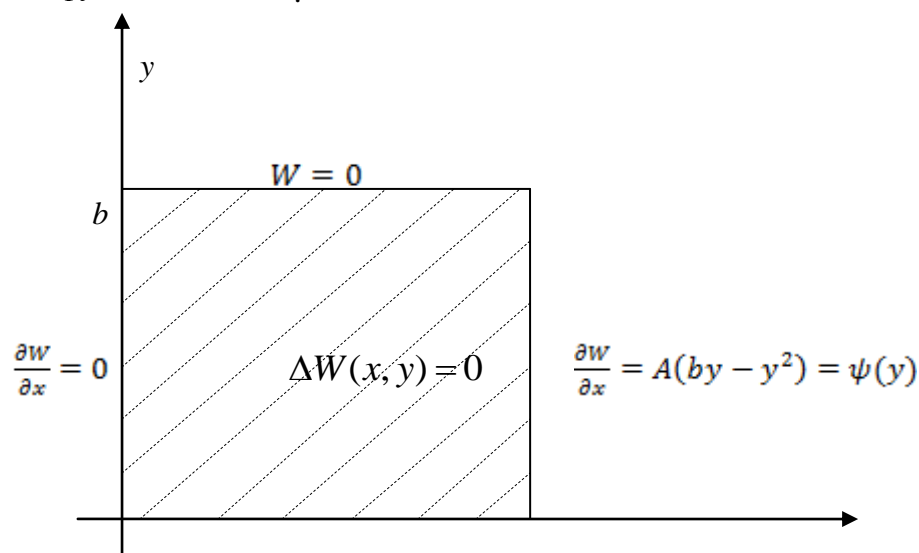
Для функции  $V(x, y)$ :



$$\Delta V(x, y) = 0$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, \quad V|_{y=0} = B, \quad V|_{y=b} = 0 \quad (4)$$

Для функции  $W(x, y)$ :



$$\begin{array}{ccccccc}
 & & D & & & & \\
 & 0 & & W = 0 & & a & & x \\
 \Delta W(x, y) = 0 & & & & & & & \\
 \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, & \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=a} = A(by - y^2), & W|_{y=0} = 0, & W|_{y=b} = 0 & & & & (5)
 \end{array}$$

Так для функции  $V(x, y)$  получилась очень простая задача, то попробуем найти эту функцию удовлетворяющую условиям (4), подбором в классе целых многочленов первой степени:

$$V(x, y) = a_1 y + a_2 x + a_3.$$

Эта функция, очевидно, удовлетворяет ДУЧП Лапласа. Её коэффициенты  $a_1, a_2, a_3$  попробуем подобрать так, чтобы удовлетворялись граничные условия:

$$\begin{cases} V'_x|_{x=0} = 0 \\ V'_x = a_2 \end{cases} \Rightarrow a_2 = 0;$$

$V'_x|_{x=a} = 0$  – верно, если учитывать, что уже найдено значение  $a_2 = 0$  ;

$$V|_{y=0} = B \Rightarrow (a_1 y + a_3)|_{y=0} = B \Rightarrow a_3 = B;$$

$$\begin{cases} V|_{y=b} = 0 \\ V = a_1 = B \end{cases} \Rightarrow a_1 b + B = 0; \Rightarrow a_1 = -\frac{B}{b}$$

Получаем, что всем условиям (4) удовлетворяет следующая функция:

$$V(x, y) = -\frac{B}{b} y + B \Leftrightarrow \underline{V(x, y) = B\left(1 - \frac{y}{b}\right)}. \quad (6)$$

Теперь будем находить функцию  $W(x, y)$  классическим методом Фурье, описывая далее кратко его основные этапы.

1 этап. Искомую функцию  $W(x, y)$  двух переменных ищем в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$W(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (7)$$

Это позволяет разделить переменные в ДУЧП Лапласа:

$$W''_{xx} + W''_{yy} = 0 \Leftrightarrow X'' \cdot Y + X \cdot Y'' = 0 \Leftrightarrow X'' \cdot Y = -X \cdot Y'' \Leftrightarrow_{:XY} \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda,$$

где  $\lambda$  - это постоянная величина и по переменной  $x$ , и по переменной  $y$ .

Получаем вместо ДУЧП систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} X'' = -\lambda X \\ Y'' = \lambda Y \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ Y'' - \lambda Y = 0 \end{cases}} \quad (8)$$

2 этап. Перебрасываем на одну из функций одной переменной нулевые граничные условия, имеющиеся на двух противоположных сторонах прямоугольной области :

$$W|_{y=0} = (X(x) * Y(y))|_{y=0} = 0 \Rightarrow X(x) * Y(y)|_{y=0} \Rightarrow Y(0) = 0 \quad \left. \vphantom{W|_{y=0}} \right\} \quad (9)$$

$$W|_{y=b} = (X(x) * Y(y))|_{y=b} = 0 \Rightarrow X(x) * Y(y)|_{y=b} \Rightarrow Y(b) = 0$$

3 этап. Решаем задачу Штурма — Лиувилля для второго уравнения системы (8) вместе с условиями (9):

$$\begin{cases} Y'' - \lambda Y = 0 \\ Y(0) = 0, Y(b) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

т.е. найдем собственные числа  $\lambda$ , при которых система (10) имеет нетривиальные решения в виде собственных функций  $Y(y)$ .

ОДУ из системы (10) является линейным, однородным и с постоянными коэффициентами, поэтому известна структура его общего решения:

$$Y_{\text{общ}}(y) = C_1 Y_1(y) + C_2 Y_2(y), \text{ где } C_1, C_2 - \text{ константы,}$$

$Y_1, Y_2$  – ФСЧР, которая находится с помощью корней характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение имеет вид:  $p^2 - \lambda = 0 \Rightarrow p^2 = \lambda \Rightarrow p_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ .

В случае, когда  $\lambda > 0$ , имеем  $p_{1,2}$  - действительные различные корни, причем  $p_2 = -p_1$ ,

$$\text{ФСЧР: } \begin{cases} Y_1(y) = e^{p_1 y} = e^{\sqrt{\lambda} y} \\ Y_2(y) = e^{p_2 y} = e^{-\sqrt{\lambda} y} \end{cases} \Rightarrow Y_{\text{общ}}(y) = C_1 e^{\sqrt{\lambda} y} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} y};$$

подставляем граничные условия:

$$Y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -C_2 \Leftrightarrow C_2 = -C_1,$$

$$Y(b) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 (e^{\sqrt{\lambda} b} - e^{-\sqrt{\lambda} b}) \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0;$$

таким образом, в случае  $\lambda > 0$  система (10) имеет только тривиальное решение  $Y(y) = 0$ .

В случае, когда  $\lambda = 0$ , имеем  $p_{1,2}$  - действительные равные корни,  $p_1 = p_2 = 0$ ,

$$\text{ФСЧР: } \begin{cases} Y_1(y) = e^{p_1 y} = e^{0y} = 1 \\ Y_2(y) = ye^{p_2 y} = ye^{0y} = y \end{cases} \Rightarrow Y_{\text{общ}}(y) = C_1 * 1 + C_2 * y;$$

подставляем граничные условия:

$$Y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \Rightarrow C_1 = 0,$$

$$Y(b) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 + C_2 * b \Rightarrow 0 = C_2 * b, \text{ где } b \neq 0 \Rightarrow C_2 = 0;$$

таким образом, в случае  $\lambda = 0$  система (10) также имеет только тривиальное решение.

В случае, когда  $\lambda < 0$ , имеем  $p_{1,2} = \pm i\sqrt{-\lambda}$  – комплексно- сопряженные корни,

$$\text{ФСЧР: } \begin{cases} Y_1(y) = e^{0y} \cdot \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot y) \\ Y_2(y) = e^{0y} \cdot \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot y) \end{cases} \Rightarrow Y_{\text{общ}}(y) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot y) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot y);$$

подставляем граничные условия:

$$Y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \Rightarrow C_1 = 0,$$

$$Y(b) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \cdot \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot b) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2 \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot b) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} \cdot b = \pi n, \quad n = 1, 2 \dots$$

$$-\lambda \cdot b^2 = \pi^2 n^2 \Rightarrow \lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2, \quad n = 1, 2 \dots$$

$$\Rightarrow Y_n(y) = C_2^{(n)} \sin\left(\frac{\pi n}{b} \cdot y\right), \quad n = 1, 2 \dots$$

Таким образом, задача Штурма - Лиувилля оказалась разрешимой при значениях  $\lambda < 0$ , и в результате получилось следующее счетное множество собственных чисел и собственных функций:

$$\begin{cases} \lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2, & n = 1, 2 \dots \\ Y_n(y) = C_2^{(n)} \sin\left(\frac{\pi n}{b} \cdot y\right), & n = 1, 2 \dots \end{cases} \quad (11)$$

4 этап. Решаем другое ОДУ из системы (8):  $X'' + \lambda X = 0$ , в котором числа  $\lambda$  известны уже по формулам (11)  $\Rightarrow$

$X_{\text{общ}}(x) = C_1 X_1(x) + C_2 X_2(x)$ , где  $C_1, C_2$  – константы,  $X_1, X_2$  – ФСЧР;

находим ФСЧР через корни характеристического уравнения:

$$p^2 + \lambda p^0 = 0 \Rightarrow_{\text{подст } \lambda \neq 0} p^2 - \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \pm \frac{\pi n}{b} \Rightarrow$$

$p_{1,2}$  - действительные различные корни;

$$\text{ФСЧР: } \begin{cases} X_1(x) = e^{p_1 x} = e^{\frac{\pi n x}{b}} \\ X_2(x) = e^{p_2 x} = e^{-\frac{\pi n x}{b}} \end{cases}.$$

С целью упрощения дальнейшего решения в задаче для ДУЧП Лапласа удобно перейти к другой фундаментальной системе частных решений:

$$\tilde{x}_1(x) = (X_1 + X_2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{\pi nx}{b}} + e^{-\frac{\pi nx}{b}} \right) = ch\left(\frac{\pi nx}{b}\right)$$

$$\tilde{x}_2(x) = (X_1 - X_2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{\pi nx}{b}} - e^{-\frac{\pi nx}{b}} \right) = sh\left(\frac{\pi nx}{b}\right).$$

Тогда имеем:

$$X_{\text{общ}}(x) = C_1 \tilde{X}_1(x) + C_2 \tilde{X}_2(x) \Rightarrow$$

$$X_n(x) = C_1^{(n)} \cdot ch\left(\frac{\pi nx}{b}\right) + C_2^{(n)} \cdot sh\left(\frac{\pi nx}{b}\right), \quad n \in \square \quad (12)$$

5 этап. Перемножением функций  $X_n(x)$  и  $Y_n(y)$  получаем счетное множество функций  $W_n(x, y)$ , каждая из которых удовлетворяет ДУЧП Лапласа и нулевым граничным условиям на двух противоположных сторонах данной прямоугольной области. При этом в функции  $W_n(x, y)$  входят произвольные пока коэффициенты, количество которых можно уменьшить, если ввести переобозначения:  $C_2^{(n)} \cdot C_1^{(n)} = A_n, C_2^{(n)} \cdot C_2^{(n)} = B_n$ , тогда

$$W_n(x, y) = X_n \cdot Y_n = \sin \frac{\pi ny}{b} \left( A_n \cdot ch \frac{\pi nx}{b} + B_n \cdot sh \left( \frac{\pi nx}{b} \right) \right), \quad n = 1, 2 \dots$$

Чтобы удовлетворить оставшимся двум условиям (вообще говоря, ненулевым) из набора условий (5) для функции  $W(x, y)$ , составим ряд из всех этих функций  $W_n(x, y)$  и предположим, что он сходится равномерно внутри области  $D$ . Если сумму ряда обозначим как  $W(x, y)$ , то получится, что

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} W_n(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{\pi ny}{b} \left( A_n \cdot ch \frac{\pi nx}{b} + B_n \cdot sh \left( \frac{\pi nx}{b} \right) \right). \quad (13)$$

6 этап. Находим значения коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$ , удовлетворяя функцией (13) граничным условиям при  $x = 0$  и при  $x = a$ . Предварительно запишем выражение частной производной по переменной  $x$  от функции  $W(x, y)$ :

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{\pi ny}{b} \cdot \frac{\pi n}{b} \cdot \left( A_n \cdot sh \frac{\pi nx}{b} + B_n \cdot ch \left( \frac{\pi nx}{b} \right) \right) \quad (13')$$

Граничные условия:

$$1) \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \forall y \in [0; b] \Rightarrow 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n y}{b} \cdot \frac{\pi n}{b} \cdot B_n, \quad \forall y \in [0; b] \Rightarrow \forall B_n = 0;$$

$$2) \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=a} = A(by - y^2), \quad \forall y \in [0; b] \Rightarrow \\ \Rightarrow A(by - y^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n y}{b} \cdot \frac{\pi n}{b} \cdot (A_n \operatorname{sh} \frac{\pi n a}{b}), \quad \forall y \in [0; b];$$

последнее равенство является разложением в тригонометрический ряд Фурье по синусам функции  $f(y) = A(by - y^2)$ ,  $y \in [0; b]$ , дополненной нечетным образом на промежутке  $y \in [-b; 0]$  и продолженной периодически с периодом  $T = 2b$  на всю числовую ось, следовательно, для нахождения коэффициентов этого разложения можно использовать стандартные формулы Фурье; в результате получаем

$$\frac{\pi n}{b} \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi n a}{b} \cdot A_n = \frac{2}{b} \int_0^b A(by - y^2) \cdot \sin \frac{\pi n y}{b} dy;$$

вычисляем записанный интеграл, а затем коэффициенты  $A_n$ :

$$\int_0^b (by - y^2) \cdot \sin \frac{\pi n y}{b} dy = \left\{ \begin{array}{l} U = by - y^2 \quad | du = (b - 2y) dy \\ dv = \sin \frac{\pi n y}{b} dy \quad | v = -\frac{b}{\pi n} \cos \frac{\pi n y}{b} \end{array} \right\} = \\ = \left. \left( -(by - y^2) \frac{b}{\pi n} \cdot \cos \frac{\pi n y}{b} \right) \right|_{y=0}^{y=b} + \int_0^b (b - 2y) \frac{b}{\pi n} \cdot \cos \frac{\pi n y}{b} dy =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U = y \quad | du = dy \\ dv = \cos \frac{\pi n y}{b} dy \quad | v = \frac{b}{\pi n} \sin \frac{\pi n y}{b} \end{array} \right\} = \frac{b}{\pi n} \left( (b - 2y) \frac{b}{\pi n} \sin \frac{\pi n y}{b} \Big|_{y=0}^{y=b} + 2 \int_0^b \frac{b}{\pi n} \sin \frac{\pi n y}{b} dy \right) \\ = -2 \left( \frac{b}{\pi n} \right)^3 \cdot \cos \frac{\pi n y}{b} \Big|_{y=0}^{y=b} = 2 \cdot \left( \frac{b}{\pi n} \right)^3 (1 - (-1)^n) \Rightarrow \\ \frac{\pi n}{b} * \operatorname{sh} \frac{\pi n a}{b} * A_n = \frac{2}{b} * A * 2 * \frac{b^3}{\pi n^3} (1 - (-1)^n) \Rightarrow \\ \boxed{A_n = \frac{4Ab^3 \cdot (1 - (-1)^n)}{(\pi n)^4 \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi n a}{b}}}$$

Запишем функцию  $W(x, y)$ , используя формулу (13) и значения коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$ :

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{\pi n y}{b} \cdot \frac{4Ab^3 * (1 - (-1)^n)}{(\pi n)^4 * sh \frac{\pi n a}{b}} \cdot ch \left( \frac{\pi n x}{b} \right) \quad (14)$$

Решение краевой задачи для функции  $W(x, y)$  классическим методом Фурье закончено.

Складывая найденные функции:  $V(x, y)$  - формула (6) и  $W(x, y)$  – формула (14), записываем искомую функцию  $U(x, y)$ :

$$U(x, y) = B \left( -\frac{1}{b} y + 1 \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \left( \frac{\pi n y}{b} \right) \cdot \frac{4Ab^3 * (1 - (-1)^n)}{(\pi n)^4 * sh \frac{\pi n a}{b}} \cdot ch \left( \frac{\pi n x}{b} \right) \quad (15)$$

Таким образом, используя одну из модификаций метода Фурье, получили решение краевой задачи (2) для уравнения Лапласа в прямоугольной двумерной области. Это решение имеет вид функционального ряда (15).

#### 4. Доказательство достоверности решения, полученного методом Фурье

Подставим функцию (15) в исходное дифференциальное уравнение  $U''_{xx} + U''_{yy} = 0$ ;

заметим, что значения коэффициентов  $A_n$  можно не использовать на этом этапе проверки:

$$U(x, y) = B \left( -\frac{y}{b} + 1 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n y}{b} \cdot A_n \cdot ch \frac{\pi n x}{b} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n y}{b} \cdot A_n \cdot \frac{\pi n}{b} \cdot sh \frac{\pi n x}{b} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n y}{b} \cdot A_n \cdot \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2 \cdot ch \frac{\pi n x}{b};$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{B}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n y}{b} \cdot \frac{\pi n}{b} \cdot A_n \cdot ch \frac{\pi n x}{b} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{\infty} -\sin \frac{\pi n y}{b} \cdot \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2 \cdot A_n \cdot ch \frac{\pi n x}{b};$$

$$U''_{xx} + U''_{yy} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{\pi n y}{b} \cdot ch \frac{\pi n x}{b} \cdot A_n \cdot \left( \frac{\pi^2 n^2}{b^2} - \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \right) = 0 - \text{верно.}$$

Проверим нулевые граничные условия:



$$U(x, y)|_{y=b} = 0 \Rightarrow U(x, y)|_{y=b} = B(-1+1) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi n \cdot A_n \cdot ch \frac{\pi n x}{b} = 0 \quad - \text{ верно};$$

$$U(x, y)|_{y=0} = B \Rightarrow U(x, y)|_{y=0} = B(0+1) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin 0 \cdot A_n \cdot ch \frac{\pi n x}{b} = 0 \quad - \text{ верно};$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n y}{b} \cdot A_n \cdot \frac{\pi n}{b} \cdot sh 0 = 0 \quad - \text{ верно}.$$

Проверяем ненулевое граничное условие:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=a} = A(by - b^2) \Rightarrow A(by - y^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n y}{b} \cdot A_n \cdot \frac{\pi n}{b} \cdot sh \frac{\pi n a}{b} ;$$

Именно из этого равенства находились значения коэффициентов  $A_n$ , поэтому теперь следует найденные значения  $A_n$  подставить и проверить выполнение равенства между функцией  $f(y) = A(by - y^2)$ ,  $y \in [0; b]$  и её представлением тригонометрическим рядом Фурье. Подставляем коэффициенты  $A_n$ :

$$A(by - y^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{\pi n y}{b} \cdot \frac{4Ab^3 \cdot (1 - (-1)^n)}{(\pi n)^4 \cdot sh \frac{\pi n a}{b}} \cdot \frac{\pi n}{b} \cdot sh \frac{\pi n a}{b} \Rightarrow$$

$$A(by - y^2) = \frac{4Ab^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \sin \frac{\pi n y}{b}, y \in [0; b]; \quad (16)$$

выполнение равенства (16) можно проверить графически, построив графики функции  $A(by - y^2)$  и некоторой частичной суммы  $S_n$  ряда, стоящего справа. Например, если зафиксировать значения управляемых параметров числами  $A = 1, b = 3, a = 1$ , то получим:

график функции  $f(y) = A(by - y^2)$

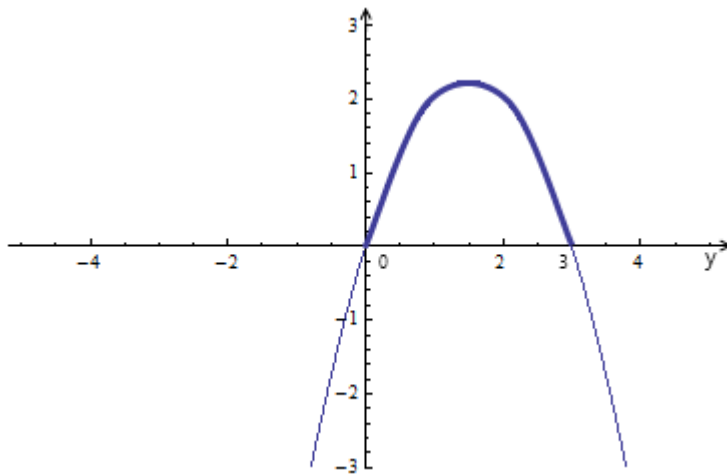
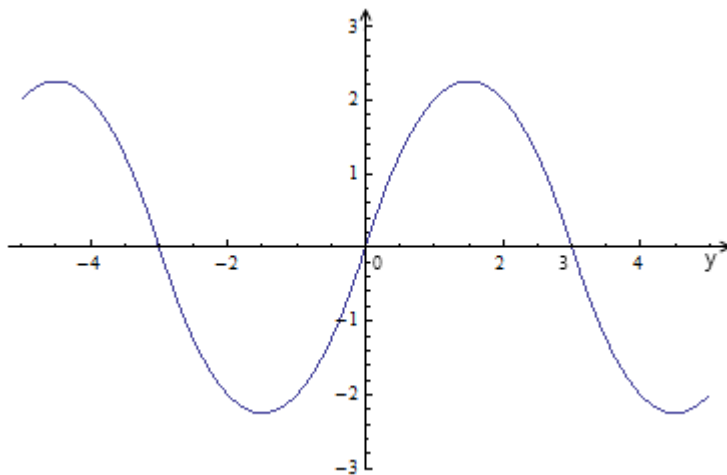


график функции 
$$S_{100}(y) = \frac{4Ab^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{100} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \sin \frac{\pi ny}{b}$$



Очевидно, наблюдается визуальное совпадение графиков на промежутке  $y \in [0; 3]$ , значит, условие  $\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=a} = A(by - y^2)$  выполняется.

Таким образом, показано, что найденная функция  $U(x, y)$  по формуле (15) удовлетворяет всем условиям краевой задачи (1), (2). Следовательно, достоверность полученного решения этой задачи доказана.

## 5. Численная реализация и исследование решения

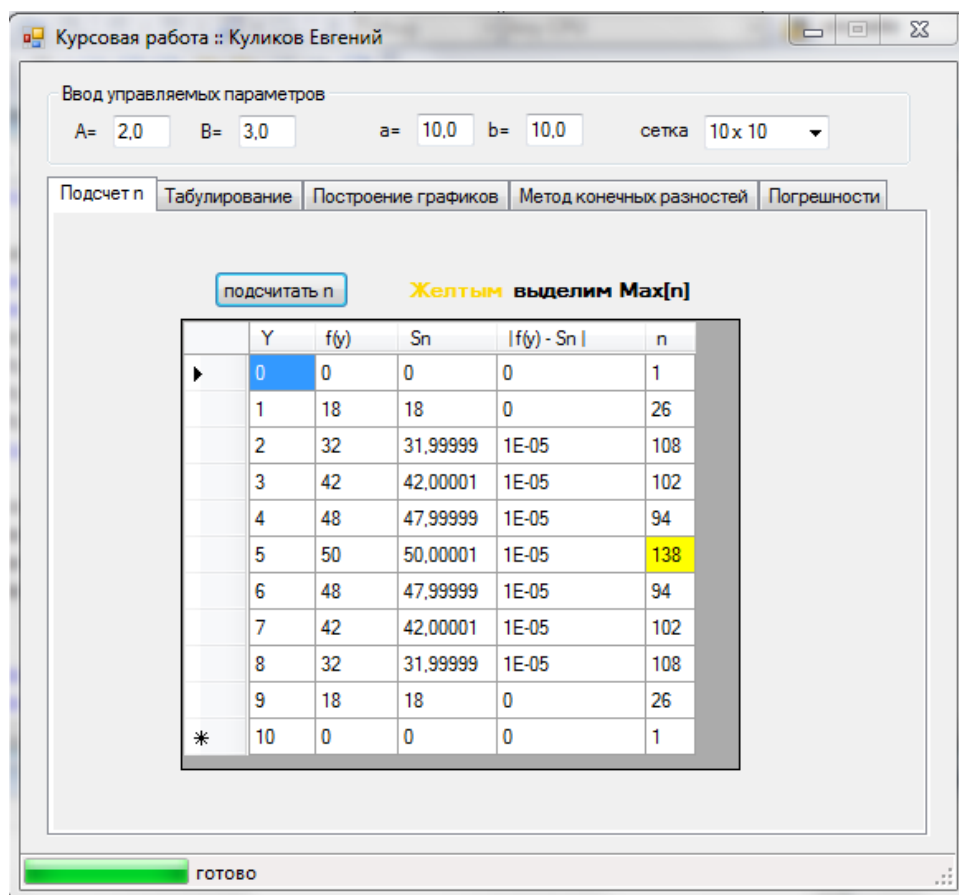
Для того, чтобы вычислить значения найденной функции  $U(x, y)$  в точках области  $D$ , ряд в формуле (15) придётся заменять некоторой частичной суммой  $S_n(x, y)$  этого ряда. Порядок  $n$  этой частичной суммы нужно подобрать так, чтобы в любой точке области  $D$  приближенное равенство  $U(x, y) \approx S_n(x, y)$  выполнялось с погрешностью, не превышающей наперёд заданное число  $\varepsilon$ . В технических расчетах обычно принимается

$\varepsilon = 10^{-5}$ . Опыт работы с функциональными рядами вида (15) показывает, что наиболее медленно такие ряды сходятся в граничных точках области  $D$ , поэтому подбор нужного (по описанному) количества членов ряда проводится на том участке границы, где заданные условия на искомую функцию  $U(x, y)$  проходили проверку только приближенно. В решаемой задаче – это условие при значениях  $x = a, y \in [0; b]$ , потому будем подбирать  $n$  – количество членов ряда (15) по следующему критерию:

$$\left| f(y) - S_n(x, y) \Big|_{x=a} \right| < \varepsilon \quad \forall y \in [0; b], \quad (17)$$

где  $f(y) = A(by - y^2)$ ,  $S_n(x, y) \Big|_{x=a} = \frac{4Ab^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^n \frac{1 - (-1)^k}{k^3} \sin \frac{\pi ky}{b}$ .

Для вычисления значения  $n$  по указанному критерию нужно задать значения управляемых параметров  $A, B, a, b$ , промежуток  $y \in [0; b]$  заменить дискретным множеством точек, расположенных с некоторым шагом, и использовать для проверки



неравенства (17) любой прикладной математический пакет или свою программу-приложение к работе. На рисунке выше показан результат работы программы *Course\_Work.exe*, реализовавшей вычисление чисел  $n$  по следующему алгоритму:

$$|f(y_i) - S_n(a, y_i)| < \varepsilon, \quad \varepsilon = 10^{-5}, \quad y_i = 0 + i \cdot \Delta y, \quad \Delta y = \frac{b}{10}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 10.$$

Наибольшее значение  $n=138$  нужно взять для табулирования значений функции  $U(x, y)$  во всех точках области  $D$ :

$$U(x, y) \approx B\left(1 - \frac{y}{b}\right) + \frac{4Ab^3}{\pi^4} \sum_{n=1}^{138} \sin \frac{\pi n y}{b} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n^4 \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi n a}{b}} \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi n x}{b}, \quad \varepsilon \leq 10^{-5} \quad (18)$$

Для табулирования значений функции  $U(x, y)$  область  $D$  покрываем прямоугольной сеткой размером  $10 \times 10$  и по формуле (18) вычисляем значения функции  $U(x, y)$  в точках  $(x_i, y_j)$ , которые являются узлами этой сетки:

$$\begin{aligned} x_i &= 0 + i \cdot \Delta x, \quad \Delta x = \frac{a}{10}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 10, \\ y_j &= 0 + j \cdot \Delta y, \quad \Delta y = \frac{b}{10}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, 10; \end{aligned} \quad (19)$$

при этом значения управляемых параметров должны быть зафиксированы такими же числами, как при подборе количества членов ряда по критерию (17).

Ниже приведены таблицы значений  $U(x_i, y_j)$  и  $\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{(x_i, y_j)}$ , а также график функции

$U(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , полученные с использованием программы *Course\_Work.exe*.

Таблица значений  $U(x, y)$  (при  $A = 2$ ,  $B = 3$ ,  $a = 10$ ,  $b = 10$ )

y/x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	4,69536	4,91417	5,59246	6,79819	8,65248	11,34292	15,14517	20,45856	27,86851	38,27329	53,20205
8	8,96028	9,37638	10,66622	12,95864	16,48315	21,59398	28,80876	38,86861	52,83366	72,2412	99,36742
7	12,40661	12,97917	14,75385	17,90744	22,75416	29,77741	39,6788	53,45005	72,4757	98,67482	134,6795
6	14,72652	15,39945	17,48514	21,1908	26,88437	35,13023	46,74333	62,86497	85,06284	115,45344	156,8332 4
5	15,7225	16,43	18,62278	22,51852	28,50345	37,16949	49,36971	66,29478	89,57115	121,3761	164,5544 2
4	15,32652	15,99945	18,08514	21,7908	27,48437	35,73023	47,34333	63,46497	85,66284	116,05344	157,4332 4
3	13,60661	14,17917	15,95385	19,10744	23,95416	30,97741	40,8788	54,65005	73,6757	99,87482	135,8795
2	10,76028	11,17638	12,46622	14,75864	18,28315	23,39398	30,60876	40,66861	54,63366	74,0412	101,1674 2
1	7,09536	7,31417	7,99246	9,19819	11,05248	13,74292	17,54517	22,85856	30,26851	40,67329	55,60205

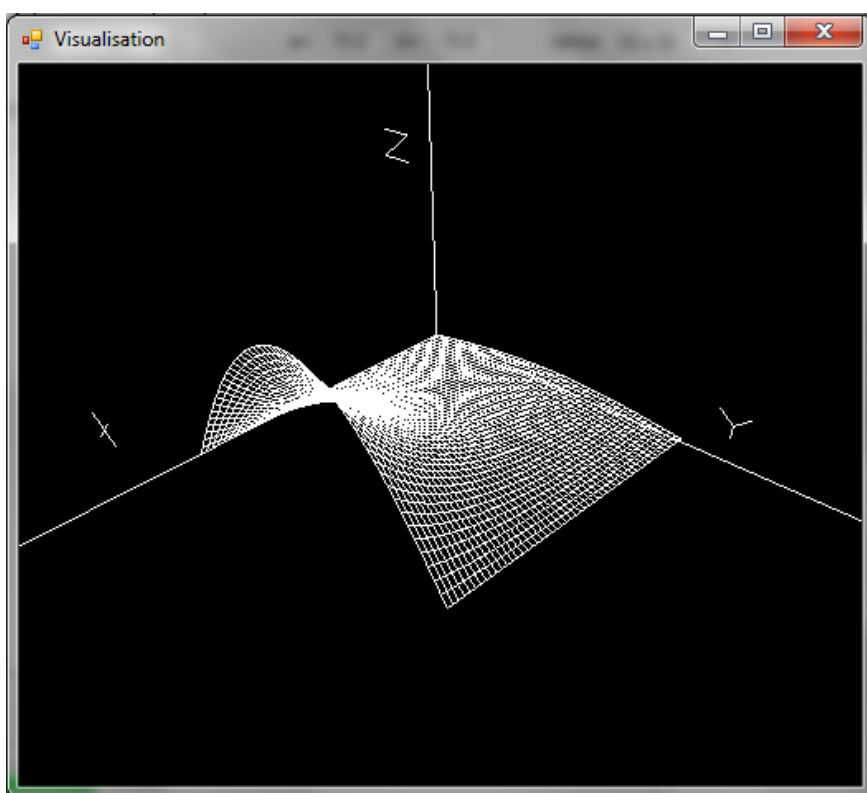
0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Таблица значений  $\frac{\partial U}{\partial x}$  (при  $A = 2, B = 3, a = 10, b = 10$ )

y/x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0,44122	0,92658	1,50484	2,23466	3,19159	4,4785	6,24397	8,72118	12,3302	17,99998
8	0	0,83905	1,76188	2,86083	4,24659	6,06037	8,49118	11,80269	16,37933	22,8087	32
7	0	1,15452	2,42402	3,93499	5,83821	8,32406	11,64232	16,12858	22,2395	30,59429	42
6	0	1,3569	2,84867	4,6234	6,8569	9,76938	13,64537	18,85712	25,8891	35,35625	48,00001
5	0	1,42661	2,99489	4,86035	7,20725	10,26573	14,3315	19,78777	27,12585	36,95658	50,00001
4	0	1,3569	2,84867	4,6234	6,8569	9,76938	13,64537	18,85712	25,8891	35,35625	48,00001
3	0	1,15452	2,42402	3,93499	5,83821	8,32406	11,64232	16,12858	22,2395	30,59429	42
2	0	0,83905	1,76188	2,86083	4,24659	6,06037	8,49118	11,80269	16,37933	22,8087	32
1	0	0,44122	0,92658	1,50484	2,23466	3,19159	4,4785	6,24397	8,72118	12,3302	17,99998
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

В приведенных таблицах хорошо просматривается выполнение граничных условий для функций  $U(x, y)$  и  $\frac{\partial U}{\partial x}$ , что подтверждает правильность нахождения функции  $U(x, y)$  и правильность самого табулирования.

График функции  $U(x, y), (x, y) \in D$  (при  $A = 2, B = 3, a = 10, b = 10$ ):



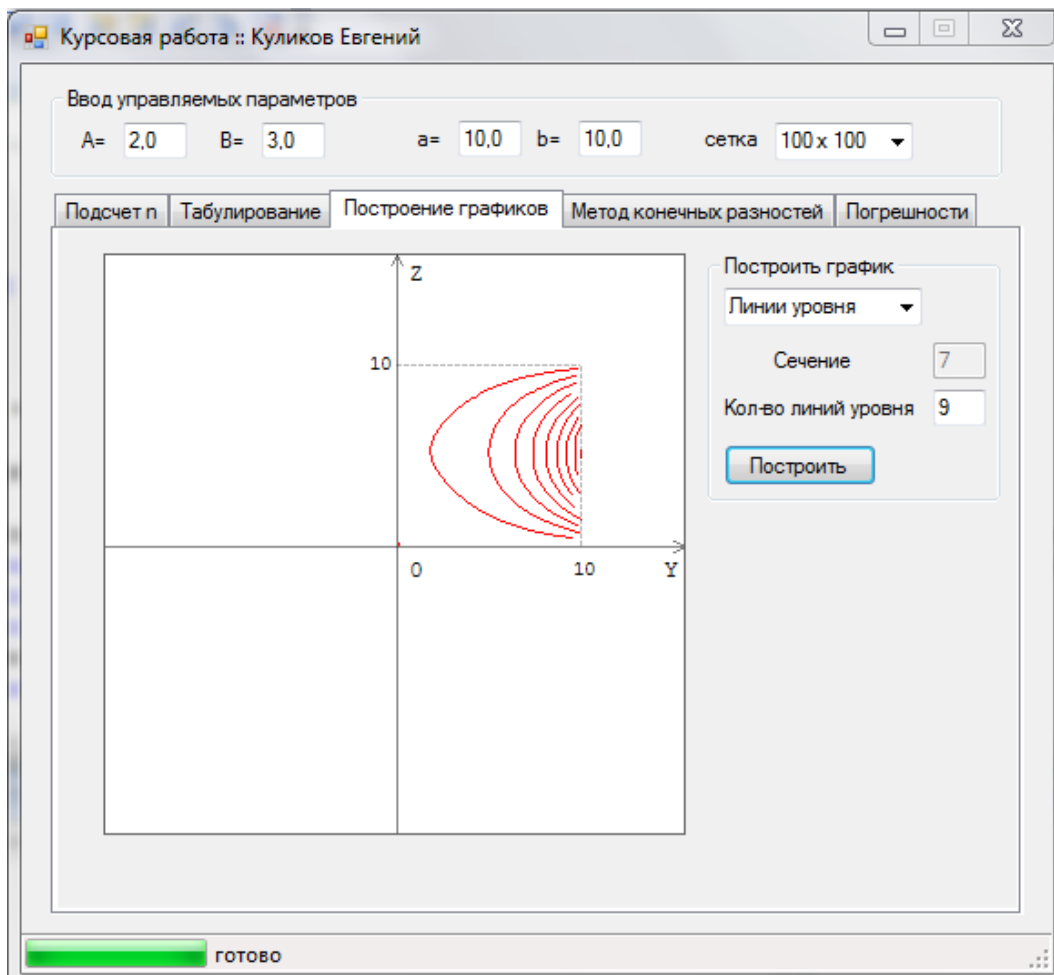
Провести исследование функции  $U(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , которая описывает стационарный процесс, можно также с помощью её линий уровня, построенных на области  $D$ .

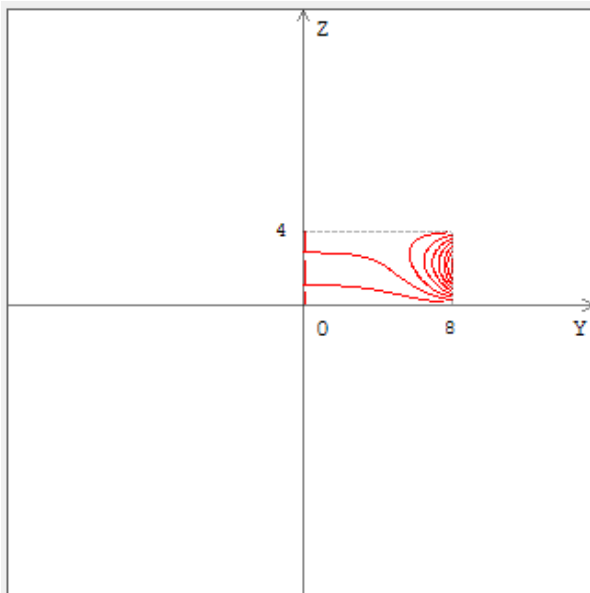
Напомним, что линией уровня функции  $U(x, y)$  называется такая линия, в каждой точке

которой эта функция имеет одно и то же значение. Например, при значении  $\frac{a}{b} = 1$

построенные линии уровня указывают на интенсивное изменение значений функции  $U(x, y)$  в той части области  $D$ , к которой примыкает её правая граница с ненулевым

условием на производную  $\frac{\partial U}{\partial x}$ .





При значении  $\frac{a}{b} = 2$  аналогичное качество в интенсивности изменения значений функции  $U(x, y)$  сохраняется, но картинка линий уровня становится несколько иной - на ней просматривается влияние ненулевого граничного условия на нижней границе области  $D$ .

**Ответ по задаче:** Распределение электростатического потенциала в прямоугольной области при заданных граничных условиях описывается следующей функцией:

$$U(x, y) = B\left(1 - \frac{y}{b}\right) + \frac{4Ab^3}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n y}{b} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n^4 \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi n a}{b}} \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi n x}{b}, \quad x \in [0; a], \quad y \in [0; b].$$

Точное решение поставленной задачи получено методом Фурье (методом разделения переменных) и исследовано с помощью графика функции  $U(x, y)$  и её линий уровня.

### Список использованной литературы и ПО

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для вузов. В 2-х т. Т. II: - М.: Интеграл-Пресс, 2001. – 544 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учеб. для вузов: – М.: Издательство МГУ, 1999. – 798 с.
3. Программа-приложение *Course\_work.exe* (написана на языке программирования C#, среда программирования Microsoft Visual Studio 2008).

## **4. Список вопросов к защите РГР**

### **Список теоретических вопросов к защите РГР по заданию «Решение краевой задачи для одного из уравнений математической физики»**

1. Определение дифференциального уравнения в частных производных (ДУЧП), его порядка, решения. Примеры ДУЧП.
2. Перечень основных уравнений математической физики и описание процессов, которым они соответствуют.
3. Классификация линейных ДУЧП II порядка.
4. Постановка начальных условий к ДУЧП. Количество начальных условий.
5. Постановка граничных условий к ДУЧП. Типы граничных условий.
6. Формулировка краевой задачи для ДУЧП.
7. Суть метода Фурье для решения краевой задачи. Границы применимости метода Фурье.
8. Постановка и решение задачи Штурма - Лиувилля.

## **5. Список рекомендуемых учебных ресурсов**

1. Контактные занятия и конспекты лекций (в том числе в электронном виде) преподавателя, ведущего дисциплину.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2-х т. Т.2. –М.: Интеграл-Пресс, 2001. – 544с.
3. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: Пер. с англ. –М.: Мир, 1985. – 384с.
4. Шарма Д.Н., Синх К. Уравнения в частных производных для инженеров. – М.: Техносфера, 2002. - с.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учеб.для втузов. – М.: Издательство МГУ, 1999. – 798с.



6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1967. - с.
7. Агошков В.И. Методы решения задач математической физики. – Москва.: Физматлит, 2002. - с.
8. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. - с.
9. Трофимова Т.И. Курс физики: Учеб.пособие для втузов. – М.: Высш.шк., 1989.  
– 608с.

## **6. Образец оформления титульного листа**

Министерство науки и высшего образования РФ

ФГАОУ ВО «Мурманский государственный технический университет»

Кафедра цифровых технологий,  
математики и экономики

### **Расчетно-графическая работа**

**«Моделирование и решение прикладных задач, сводящихся к  
дифференциальным уравнениям»**

по дисциплине «Специальные разделы высшей математики», часть 1

выполнил: студент группы ИВТб-21о

Судов Андрей

проверил: доцент Кацуба В.С.

оценка: \_\_\_\_\_

дата: \_\_\_\_\_

Мурманск,  
2023